Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
P. D. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2015
22.05.2015
Blatt 6

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

21. Für festes $k \in \mathbb{N}$ zeige man, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, wobei

(a) $a_n = \dfrac{k^n}{n!}$ (b) $a_n = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}$.

Verwenden Sie das "Sandwich-Theorem".

22. Die Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch

$$x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, \quad n \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist, und berechnen Sie den Grenzwert. Ist (x_n) monoton (fallend oder wachsend)?

Hinweis: Zum Nachweis, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist, können Sie Satz 2 aus Abschnitt 2.4 der Vorlesung und die anschließende Bemerkung benutzen.

23. Es seien $p \geq 2$ eine natürliche und $a > 0$ sowie $x_1 > 0$ reelle Zahlen. Für $n \geq 2$ sei x_n rekursiv definiert durch

$$x_n := \frac{1}{p}\left((p-1)x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{p-1}}\right).$$

Zeigen Sie für $n \geq 2$, dass $x_n > 0$ gilt, sowie

(a) $x_n = x_{n-1}\left(1 + \dfrac{1}{p}\Big(\dfrac{a}{x_{n-1}^p} - 1\Big)\right)$,

(b) $x_n^p \geq a$,

(c) $(x_{n+1} - x_n)x_n^{p-1} \leq 0$.

Folgern Sie, dass (x_n) gegen die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $x^p = a$ konvergiert.
Hinweis zu (b): Bernoullische Ungleichung.

24. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $e_n^* = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung, dass die Folge (e_n^*) streng monoton fallend ist.

Abgabe: Fr., 29.05.2015, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 03.06.2015 und Do., 11.06.2015