Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
P. D. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2015
29.05.2015
Blatt 7

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

25. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie Ihre Ergebnisse:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}}, \qquad p \in \mathbb{N},$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}, \qquad a \in \mathbb{R}^+,$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p}, \qquad p \in \mathbb{N},$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n,$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}, \qquad a, b \in \mathbb{R}^+.$

Hinweis: Durch Bearbeitung aller fünf Aufgabenteile kann ein Zusatzpunkt erworben werden.

26. Für Teilmengen A und B von $\mathbb{R}$ definiert man $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Beweisen Sie für nichtleere, beschränkte Mengen A und B die Identitäten

(a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B,$

(b) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$

27. Es seien (a_n) und (b_n) beschränkte Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie:

(a) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n,$

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n.$

Geben Sie *ein* Folgenpaar an, für das in (a) $<$ und in (b) $>$ gilt. Leiten Sie ferner entsprechende Ungleichungen für $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ her.

Hinweis: Bereits für Teil (b) beachte man $\liminf\limits_{n\to\infty}(-c_n) = -\limsup\limits_{n\to\infty} c_n$.

Bitte wenden!

28. (a) Die Folge $(f_n)_n$ der *Fibonacci-Zahlen* ist durch

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \ (n \geq 1)$$

rekursiv definiert. Berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n f_{n+2}},$$

indem Sie die Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f_k f_{k+2}}$ als Teleskopsummen $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})$ mit geeigneten a_k darstellen.

(b) In ähnlicher Weise berechne man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Abgabe: Fr., 12.06.2015, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 17.06.2015 und Do., 18.06.2015