Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
P. D. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2015
12.06.2015
Blatt 8

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

29. Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für vier der nachstehenden fünf Folgen (a_n) auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ (b) $a_n = \dfrac{(1+i)^n}{n^2}$ (c) $a_n = \dfrac{i^{(n^2)}}{n}$

(d) $a_n = \dfrac{(3+4i)^n}{5^n \sqrt[999]{n}}$ (e) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

Benennen Sie die Konvergenzkriterien für Reihen, die Sie benutzt haben.

Hinweis: Durch Bearbeitung aller fünf Aufgabenteile kann ein Zusatzpunkt erworben werden.

30. Die b-adische Entwicklung

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b^k} \ , \ \ a_k \in \{0, \dots, b-1\}$$

einer reellen Zahl $x \in [0,1]$ heißt *periodisch*, falls $k_0 \in \mathbb{N}$ und $\ell \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt $a_{k+\ell} = a_k$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall x rational ist.

Anleitung: Mit Hilfe der geometrischen Reihe zeige man die Darstellung

$$x = \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{a_k}{b^k} + \frac{b^\ell}{b^\ell - 1} \sum_{k=k_0}^{k_0+\ell-1} \frac{a_k}{b^k}.$$

31. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(a) Für $n, N \in \mathbb{N}_0$ gilt die Identität $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{N+k}{k} = \binom{N+1+n}{n}$.

(b) Für $N \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist

$$\frac{1}{(1-z)^{N+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N+n}{n} z^n.$$

Hinweis zu (b): Cauchy-Produkt von Reihen.

Bitte wenden!

32. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^7}{2^n} \cdot z^n \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \cdot z^{2n} \qquad \text{(d)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 4^{n!} z^{n!}$$

Untersuchen Sie auch das Konvergenzverhalten dieser Reihen auf dem Rand ihres Konvergenzkreises.

Hinweis: Beachten Sie, dass es sich in den Teilen (c) und (d) um sogenannte "Lückenreihen" handelt, bei denen unendlich viele $a_n = 0$ sind. Hier ist die Eulersche Formel für den Konvergenzradius nicht ohne weiteres anwendbar, auch bei der Formel von Cauchy-Hadamard ist Vorsicht geboten.

Abgabe: Fr., 19.06.2015, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 24.06.2015 und Mi., 25.06.2015