Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
P. D. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2015
19.06.2015
Blatt 9

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

33. Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n,$$

wobei die f_n die Fibonacci-Zahlen sind (vgl. Aufgabe 28). Leiten Sie dazu eine Rekursion für $x_n := \frac{f_n}{f_{n+1}}$ her und verwenden Sie Aufgabe 22 sowie die Eulersche Formel für den Konvergenzradius. Zeigen Sie ferner, dass für $|z| < R$ die Identität

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

gilt.

34. Die Funktionen

$$\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ (Cosinus hyperbolicus)},$$
$$\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ (Sinus hyperbolicus)},$$

sind definiert durch

$$\cosh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)),$$
$$\sinh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)).$$

Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellungen dieser Funktionen, und zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $\cosh(z + w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$,

(b) $\sinh(z + w) = \cosh(z)\sinh(w) + \sinh(z)\cosh(w)$,

(c) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.

Bitte wenden!

35. Es sei $f: \mathbb{C} \supset X \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass $c > 0$ und $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ existieren, so dass für alle $x, y \in X$

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^\alpha.$$

Beweisen Sie unter Verwendung der ε-δ-Definition, dass f gleichmäßig stetig ist. Als Anwendung zeige man die gleichmäßige Stetigkeit von

$$f: [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sqrt{x}.$$

Bemerkung: Eine Funktion f mit der oben genannten Eigenschaft heißt Hölder-stetig zum Exponenten α.

36. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \dfrac{x^3}{1+x^2}$,

(b) $f: \{z \in \mathbb{C}: |z| < 10^6\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) := z^{27} + 2z^{15} + \exp(z)$,

(c) $f: (-\infty, 0] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \exp(x)$,

(d) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) := z(1+z)$.

Abgabe: Fr., 26.06.2015, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 01.07.2015 und Do., 02.07.2015