Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2006/07
7. November 06
Blatt 4

Übungen zu Analysis III

13. Ist $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \le x < 1$, so lässt sich x eindeutig in der Form

$$x = 0, c_1\, c_2\, c_3 \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot 10^{-k}$$

mit $c_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ schreiben, wobei unendlich viele der c_k von 9 verschieden sind. Wir nennen dies die Dezimaldarstellung von x. Sei X die Menge aller $x \in [0, 1[$, in deren Dezimaldarstellung die Ziffer 9 nicht vorkommt.

   (a) Zeigen Sie: X ist überabzählbar.

   (b) Zeigen Sie, dass X eine Borel-Menge ist und bereichnen Sie $\lambda^1(X)$.

14. Zeigen Sie, dass die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ abzählbar ist.

15. Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 2 von §4 der Vorlesung.

16. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Zeigen Sie, dass f (bezgl. der σ-Algebra $\mathcal{B}^1$) meßbar ist.

17. Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Zeigen Sie: Genau dann ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

      1. Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n < a + \varepsilon$.
      2. Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > a - \varepsilon$.

   (b) Zeigen Sie: Genau dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, wenn $\limsup_{n\to\infty} a_n = a = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

   (c) Bestimmen Sie $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$ für

      1. $a_n = n$,
      2. $a_n = (-1)^n n$,
      3. $a_n = (-1)^n (1 - 2^{-n})$,
      4. $a_n = (-1)^n (1 + 2^{-n})$.

Abgabe: Dienstag, den 14. November 06, 11.15 Uhr