Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PROF. DR. W. SINGHOF

SS 2007
13. Juli 2007

Klausur zu Analysis IV

1. Finden Sie die Singularitäten der folgenden Funktionen und bestimmen Sie den Typ der Singularität. Geben Sie das jeweilige Residuum an.
   (a) (3 P) $z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$
   (b) (3 P) $\dfrac{1-\cos(z)}{z^2}$
   (c) (4 P) $\dfrac{z^3}{(1+z)^3}$
2. (10 P) Entwickeln Sie $f(z) := \dfrac{1}{z(z-1)^3}$ als eine Laurent-Reihe in $K_{0,1}(1)$ und $K_{1,\infty}(1)$.
3. Sei $\gamma : [0,3] \to \mathbb{C}$ der geschlossene Weg, der gegeben ist durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} 3te^{\pi i t} & t \in \left[0, \frac{3}{2}\right], \\ 3(3-t)e^{\pi i t} & t \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]. \end{cases}$$

   (a) (2 P) Skizzieren Sie das Bild von γ.
   (b) (3 P) Lesen Sie an der Skizze die Umlaufzahlen $\nu_\gamma(i)$ und $\nu_\gamma(-i)$ ab.
   (c) (5 P) Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \frac{z^2+4}{(z^2+1)^2}\, dz.$$

4. Berechnen Sie mit Hilfe der Residuenmethode:

$$(5P) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+17x^2+16}\, dx$$

$$(5P) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx$$

Bitte wenden!

5. (10 P) Wie viele Nullstellen (mit Vielfachheit) besitzt folgendes Polynom in $K_{1,\infty}(0)$

$$z^7 - z^4 + z^2 - 6z + 2 \ ?$$

6. (10 P) Die holomorphe Funktion f habe in c eine Nullstelle n-ter Ordnung. Sei $g(z) := z \cdot \dfrac{f'(z)}{f(z)}$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Res}_c(g) = n \cdot c.$$

7. (10 P) Sei $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ und sei (f_n) eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass es ein $R > 0$ gibt mit $f_n(z) \in B_R(0)\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in D$.

8. (10 P) Seien p, q komplexe Polynome mit $q(z) \neq 0\ \forall z \in \mathbb{R}$ und $\mathrm{grad}(q) \geq 2 + \mathrm{grad}(p)$. Dann gilt:

$$\sum_{\mathrm{Im} c > 0} \mathrm{Res}_c(\frac{p}{q}) = - \sum_{\mathrm{Im} c < 0} \mathrm{Res}_c(\frac{p}{q}).$$