Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2007
15. Juni 07
Blatt 10

Übungen zu Analysis IV

35. Führen Sie den Beweis der Folgerung aus Satz 3 von §15 aus, d. h. zeigen Sie: Sei U ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und sei (f_n) eine Folge injektiver holomorpher Funktionen auf U, die lokal gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert. Dann ist f entweder konstant oder injektiv.

36. Folgern Sie aus dem Residuensatz: Sei R eine rationale Funktion von zwei Veränderlichen, also $R = \frac{f}{g}$ mit komplexen Polynomen f, g von zwei Veränderlichen. Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 = 1$ sei $g(x, y) \neq 0$. Dann ist

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \sum_{c \in B_1(0)} \mathrm{Res}_c(Q),$$

wobei Q die meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ ist, die gegeben ist durch

$$Q(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

37. Berechnen Sie mit Hilfe der Residuenmethode

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\mathrm{d}x;$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^3}$ für $a > 0$;

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi}{5 + 3\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi;$ d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1 + x^2)^3}\mathrm{d}x.$

38. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen des Polynoms $z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2$ in der Menge $B_1(0)$.

Abgabe: Freitag, den 22. Juni 2007, 11.15 Uhr