Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 29.10.2019

Blatt 4

Übungen zur Analysis III

1. Bestimmen Sie für die angegebenen Folgen numerischer Funktionen auf J jeweils die numerische Funktion $\limsup_{n\to\infty} f_n$.

   (a) (2P) $J = [-1, 1]$, $f_n(x) = x^n$

   (b) (2P) $J = \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-nx^2}$

   (c) (2P) $J = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{(-x)^j}{j!}$

   (d) (4P) $J = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+n} \frac{x^{2j}}{(2j)!}$

2. (10P) Zeigen Sie: Jede monoton wachsende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Borel-messbar (also messbar, wenn $\mathbb{R}$ mit der σ-Algebra der Borelmengen versehen ist).

3. (10P) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass M genau dann eine Lebesgue-Nullmenge ist, wenn es eine Folge $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Quadern gibt, so dass $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(Q_j) < \infty$ und jedes $x \in M$ in unendlich vielen Q_j liegt.

4. (10P) Eine F_σ-Menge ist eine abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen, eine G_δ-Menge ist ein abzählbarer Durchschnitt von offenen Mengen.

   Zeigen Sie: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn es eine F_σ-Menge F und eine G_δ-Menge G gibt, so dass $F \subseteq M \subseteq G$ und $\lambda^n(G \setminus F) = 0$.

   Hinweis: Verwenden Sie Satz 4.6.

Abgabe: Di, 05.11.2016, 10:20

Besprechung: 13. und 14. November