Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 11.06.2018

Blatt 9

Übungen zu Einführung in die Funktionalanalysis

1. (10P) Für $k \in L^2([0,1]^2)$ ist der Fredholmsche Integraloperator T_k gegeben durch

$$T_k \colon L^2[0,1] \to L^2[0,1], \quad T_k(f)(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t) d\lambda_1(t) \ \lambda_1\text{-fast überall.}$$

   Zeigen Sie die Stetigkeit von T_k. Geben Sie eine konkrete Abschätzung für die Operatornorm an.

2. (10P) Verwenden Sie das Prinzip der Verdichtung der Singularitäten aus Aufgabe 4 von Blatt 8, um die Existenz einer stetigen, 2π-periodischen Funktion zu zeigen, deren Fourierreihe in allen rationalen Punkten divergiert.

3. (10P) Betrachten Sie für $z \in \ell^\infty$ den Operator

$$T_z \colon c_0 \to c_0, \quad x \mapsto (z_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

   Zeigen Sie, dass T_z genau dann kompakt ist, wenn $z \in c_0$.

   Hinweis: Verwenden Korollar 11.5.

4. (10P) Sei $|||\cdot|||$ eine Norm auf $C[0,1]$ mit den folgenden Eigenschaften:

   (a) $(C[0,1], |||\cdot|||)$ ist vollständig,

   (b) für jedes $t \in [0,1]$ ist die Punktauswertung $\delta_t \colon (C[0,1], |||\cdot|||) \to \mathbb{K}$, $f \mapsto f(t)$, stetig.

   Zeigen Sie, dass dann $|||\cdot|||$ zur Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{0 \le t \le 1} |f(t)|$ äquivalent ist.

Abgabe: Mo, 18.06.2018, vor der Vorlesung

Besprechung: 26. Juni